Θεωρία Συνόλων

Δρ. Κωνσταντίνος Κυρίτσης *
Εκπαιδευτικός Όμιλος ΒΙΤΑΛΗ
Μακράς Στοάς 7 & Εθνικής Αντιστάσεως
Πειραιάς 185 31

09 Μαρτίου 2009

Περίληψη

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν μια σύντομ εισαγωγή στη θεωρία των συνόλων και ων ιδιοτήτων τους.

*email: kkiritsis@vitali.gr

Περιεχόμενα

Κεντρικό: Εθνική Αντιστάσεως & Μακράς Στοάς 7, Πειραιάς 185 31
Παράρτημα: Δεληγιώργη 106Α, Πειραιάς 185 34. (Έναντι Παν. Πειραιώς)
Τηλ. 210-4220970-2, Fax. 210-4220634.
URL: http://www.vitali.gr, email: info@vitali.gr.

1 Εισαγωγή – Ορισμοί

Βασική έννοια στα μαθηματικά είναι η έννοια του συνόλου. **Σύνολο** είναι απλοϊκά μια καλώς ορισμένη συλλογή πραγμάτων. Μερικές ιδιότητες των συνόλων είναι

1. Τα σύνολα αποτελούνται από **στοιχεία**. Αν το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο S γράφουμε $a \in S$. Αν δεν ανήκει, $a \notin S$.

2. Υπάρχει ένα σύνολο χωρίς καθόλου στοιχεία. Πρόκειται για το **κενό σύνολο** $\emptyset$.

3. Παριστάνουμε τα σύνολα είτε παραθέτοντας τα στοιχεία τους, π.χ. $A = \{a, b, c\}$ είτε δίνοντας μια χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων τους, π.χ. $S = \{x : P(x)\}$.

4. Το σύνολο πρέπει να είναι καλώς ορισμένο με την έννοια ότι το στοιχείο a πρέπει να είναι ξεκάθαρο αν ανήκει ή όχι στο σύνολο.

Θα λέμε ότι το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B αν για κάθε $a \in A$ είναι $a \in B$. Θα γράφουμε τότε $A \subseteq B$. Κάθε σύνολο έχει δύο τετριμμένα υποσύνολα, τον εαυτό του A και το κενό. Κάθε άλλο υποσύνολο λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** και γράφουμε $A \subset B$. Ισχύει ότι

1.
$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A.$$

2.
$$A \subseteq B \text{ και } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

Κλάση ονομάζεται ένα σύνολο που για στοιχεία έχει άλλα σύνολα.

Δυναμοσύνολο ενός συνόλου S λέγεται η κλάση όλων των υποσυνόλων του A. Συμβολίζεται με 2^S.

Ορίζουμε το **Καρτεσιανό γινόμενο** συνόλων να είναι

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \tag{1}$$

Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη. Ανάλογα ορίζεται και το γινόμενο τριών και περισσοτέρων συνόλων.

Η **ένωση** συνόλων είναι το σύνολο $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$. Η **τομή** συνόλων είναι το σύνολο $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$. Δύο σύνολα A, B λέγονται **ξένα** αν $A \cap B = \emptyset$.

Η **διαφορά** συνόλων $A \setminus B$ ή $A - B$ είναι το σύνολο $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$. Η **συμμετρική διαφορά** είναι το σύνολο $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Σε πολλά προβλήματα δουλεύουμε στα πλαίσια ενός συνόλου το οποίο δεν αλλάζει. Αυτό λέγεται **παγκόσμιο σύνολο** και συνήθως συμβολίζεται με U. Αν $A \subseteq U$, ορίζουμε το **συμπλήρωμα** του A να είναι το σύνολο $A^c = \bar{A} = U \setminus A$. Με άλλα λόγια $A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$. Ισχύει ότι $\emptyset^c = U$ και $U^c = \emptyset$.

Για την άλγεβρα συνόλων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1. $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

4. $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Επίσης αν ισχύει η εξίσωση E για κάποια σύνολα, θα ισχύει και η **δυϊκή** της E^* που προκύπτει από την E με τις εναλλαγές $\cap \to \cup$, $\cup \to \cap$, $U \to \emptyset$, $\emptyset \to U$.

2 Καρτεσιανό Γινόμενο

Έστω τα σύνολα A, B. Ορίζουμε σαν **καρτεσιανό γινόμενό** τους να είναι το σύνολο
$$C = A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \tag{2}$$
Πρόκειται για διατεταγμένα ζεύγη με το πρώτο μέλος από το σύνολο A και το δεύτερο από το B.

Για τρία σύνολα είναι $D = (A \times B) \times C$. Για τέσσερα $E = ((A \times B) \times C) \times D$. Ο ορισμός γενικεύεται για n σύνολα. Στην πράξη το καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων είναι διατεταγμένες n-άδες.

3 Σχέσεις

Σχέση R μεταξύ δύο συνόλων ορίζεται να είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$, $R \subseteq A \times B$. Θα λέμε ότι το $a \in A$ σχετίζεται με το $b \in B$ αν $(a, b) \in R$. Γράφουμε τότε aRb. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέμε $a \not R b$.

Η **αντίστροφη σχέση** $R^{-1} \subseteq B \times A$ ορίζεται να είναι $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

Κεντρικό: Εθνική Αντιστάσεως & Μακράς Στοάς 7, Πειραιάς 185 31
Παράρτημα: Δεληγιώργη 106A, Πειραιάς 185 34. (Έναντι Παν. Πειραιώς)
Τηλ. 210-4220970-2, Fax. 210-4220634.
URL: http://www.vitali.gr, email: info@vitali.gr.

Μια σχέση μπορούμε να την αναπαραστήσουμε γραφικά (αν δίνεται με κάποια εξίσωση), με κάποιον πίνακα ή με διάγραμμα.

Η **σύνθεση** δυο σχέσεων $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times C$ ορίζεται να είναι εκείνη η σχέση $R \circ S \subset A \times C$ για την οποία $R \circ S = \{(a,c) : \exists b \in B : (a,b) \in R$ και $(b,c) \in S\}$. Αν M_R είναι ο πίνακας της R και M_S της S, τότε $M_{R \circ S} = M_R M_S$. Τέλος ισχύει ότι $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Μια σχέση λέγεται **ανακλαστική** αν $xRx \Leftrightarrow (x,x) \in R, \forall x \in X$.

Μία σχέση λέγεται **συμμετρική** αν $xRy \Rightarrow yRx$.

Μία σχέση λέγεται **αντισυμμετρική** αν xRy και $yRx \Rightarrow x = y$.

Μία σχέση λέγεται **μεταβατική** αν xRy και $yRz \Rightarrow xRz$.

Μία σχέση λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** αν είναι

1. ανακλαστική,
2. συμμετρική,
3. μεταβατική.

Μία σχέση λέγεται **σχέση μερικής διάταξης** αν είναι

1. ανακλαστική,
2. αντισυμμετρική,
3. μεταβατική.

4 Συναρτήσεις

Συνάρτηση ή **απεικόνιση** ϕ μεταξύ δύο συνόλων X, Y είναι μια σχέση, $\phi \subseteq X \times Y$, με την ιδιότητα $\forall x \in X$ το ζεύγος (x,y) να εμφανίζεται μία και μόνο μία φορά στο ϕ. Γράφουμε

$$\phi : X \to Y, \tag{3}$$

ή

$$x \mapsto y.$$

Το σύνολο X λέγεται **πεδίο ορισμού**. Το σύνολο Y λέγεται **σύνολο τερματισμού**. Το σύνολο $\phi[X] = \{y : \exists\, x \in X, y = \phi(x)\}$ λέγεται **σύνολο τιμών**. Εναλλακτικά $\phi[X] = \mathrm{Im}(\phi)$.

Ορίζουμε το **γράφημα** της συνάρτησης να είναι $G = \{(x,y) : x \in X,\ y = \phi(x)\}$. Η συνάρτηση είναι ειδική περίπτωση σχέσης, $G \subseteq X \times Y$.

Δύο συναρτήσεις είναι **ίσες** αν και μόνο αν $G_\phi = G_\psi$.

Ορίζουμε την **ταυτοτική συνάρτηση** ενός συνόλου X, $\mathrm{id}_X : X \to X$ να είναι εκείνη η συνάρτηση με τύπο $\mathrm{id}_X(x) = x$.

Ορίζουμε την **σύνθεση συναρτήσεων** $\phi : X \to Y$ και $\psi : Y \to Z$ να είναι η συνάρτηση $\psi \circ \phi : X \to Z$ με τύπο $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x))$.

Μια συνάρτηση λέγεται **επί** αν $\mathrm{Im}(\phi) = Y$.

Μία συνάρτηση λέγεται **ένα-πρός-ένα** άν $\forall x_1, x_2 \in X, \phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Μια συνάρτηση λέγεται **αμφιμονοσήμαντη** αν είναι ταυτόχρονα ένα-προς-ένα και επί. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\phi^{-1} : Y \to X$, τέτοια ώστε $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_Y$ και $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_X$.

5 Πληθάριθμος

Πληθάριθμος ενός συνόλου ορίζεται να είναι το πλήθος των στοιχείων του. Συμβολίζεται με $n(S)$ ή $|S|$. Είναι

- $n(\emptyset) = 0$,
- $n(2^S) = 2^{n(S)}$,
- $n(U) = n(A) + n(A^c)$,
- $n(A \backslash B) = n(A) - n(A \cap B)$,
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Θα λέμε ότι δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το ένα στο άλλο.

Ορίζουμε τον πληθάριθμο του $\mathbb{N}$ να είναι $\aleph_0$ (άλεφ μηδέν). Ένα σύνολο είναι **αριθμήσιμο** αν έχει τον ίδιο πληθάρισμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ισχύει ότι $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. Το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

6 Διαμέριση

Διαμέριση ενός συνόλου S ονομάζεται μια συλλογή μη κενών υποσυνόλων S_i του S,τέτοια ώστε

- Κάθε στοιχείο του S ανήκει σε ένα και μοναδικό υποσύνολο της διαμέρισης,
- Η ένωση των υποσυνόλων S_i της διαμέρισης είναι όλο το αρχικό σύνολο S.

Τα υποσύνολα S_i της διαμέρισης λέγονται **κελιά**. Το κελί που περιέχει το στοιχείο x συμβολίζεται με $\bar{x}$ ή $[x]$.

Κάθε διαμέριση του S οδηγεί σε μια σχέση R. Είναι xRy αν x, y ανήκουν στο ίδιο κελί.

Έστω σύνολο S και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας. Τότε ορίζεται μια διαμέριση του S ως εξής.

$$S_i = [a] = \{x \in S : x \sim a\}. \tag{4}$$

Κάθε κελί αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία που είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Αντίστροφα, δεδομένης μιας διαμέρισης ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$, τέτοια ώστε $a \sim b$ αν και μόνο αν τα a, b ανήκουν στο ίδιο κελί.

7 Ακόλουθο Σύνολο - Οι Φυσικοί Αριθμοί

7.1 Ακόλουθο Σύνολο

Έστω A ένα σύνολο. Ορίζουμε το **ακόλουθο** σύνολο του A και γράφουμε A^+ να είναι το σύνολο $A \cup \{A\}$. Με άλλα λόγια $A^+ = \{A, \{A\}\}$.

7.2 Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα, (οι αριθμοί χρησιμοποιούνται σαν σύμβολα για την ώρα, αντί για γράμματα).

1. $0 = \emptyset$.
2. $1 = \{\emptyset\}$.
3. $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$...

Είναι $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, $3 = 2^+$ κ.λ.π.

Ορζίουμε τώρα το σύνολο $\mathbb{N}$ με τις ιδιότητες

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε και $n^+ \in \mathbb{N}$.
3. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει άλλα σύνολα από αυτά που περιγράφονται παραπάνω.

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες θα αναφέρουμε μόνο ότι η παραπάνω κατασκευή ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς, συνεπώς μπορεί να αποτελέσει κατασκευή των φυσικών αριθμών.

8 Μαθηματική Επαγωγή

Η αρχή της **μαθηματικής επαγωγής** μας επιτρέπει να αποδείξουμε μια πρόταση για κάνε φυσικό $n \geq n_0$.

Αρχή 1 (Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής) *Μια πρόταση θα ισχύει για κάθε φυσικό αιρθμό $n \geq n_0$ αν*

1. *Ισχύει για $n = n_0$,*
2. *Δεδομένου ότι ισχύει για $n = k \geq n_0$ ισχύει και για $n = k + 1$.*

Αυτό γενικεύεται.

Αρχή 2 (Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής) *Μια πρόταση θα ισχύει για κάθε φυσικό αιρθμό $n \geq n_0$ αν*

1. *Ισχύει για $n = n_0$,*
2. *Δεδομένου ότι ισχύει για κάθε n με $n_0 \leq n \leq k$, ισχύει και για $n = k + 1$.*

9 Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Για τον πληθάριθμο ένωσης συνόλων ισχύει ότι

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \tag{5}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C), \tag{6}$$

και αντίστοιχες γενικεύσεις.

Αυτή είναι και η **αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού**.

10 Το παράδοξο του Russell

Είπαμε ότι ένα σύνολο μπορεί να δωθεί με βάση τις ιδιότητες των στοιχείων που το αποτελούν, $S = \{x : P(x)\}$. Δεν είναι όλες οι προτάσεις $P(x)$ κατάλληλες για ορισμό συνόλου.

Τυπικό παράδειγμα αποτελεί το 'τέρας' του Russell, το οποίο είναι το σύνολο

$$R = \{x : x \notin R\}, \tag{7}$$

δηλαδή το σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του σαν σύνολο. Αυτή η διατύπωση είναι αντίφαση.

Το πρόβλημα αίρεται στα πλαίσια μιας προσεκτικής αξωματικής θεμελείωσης της θεωρίας συνόλων. Στην πράξη δουλεύουμε στα πλαίσια ενός παγκόσμιου συνόλου και δεν θεωρούμε προβληματικές κατασκευές σαν και την (7).

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Πανεπιστημιακά Φροντιστήρια

Μαθήματα για:

- Πανεπιστήμιο Πειραιώς
- Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Πάντειον Πανεπιστήμιο
- Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (ΕΜΠ)
- Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (ΕΑΠ)
- ΤΕΙ Αθηνών
- ΤΕΙ Πειραιώς...

Σεμινάρια για Διαγωνισμούς Δημοσίου

Προετοιμασία για:

- Εθνική Σχολή Δημόσιας Διοίκησης
- Εθνική Σχολή Τοπικής Αυτοδιοίκησης
- Υπουργείο Οικονομικών
- Υπουργείο Εξωτερικών
- Υπουργείο Δικαιοσύνης
- Διαγωνισμός Εκπαιδευτικών
- Διαγωνισμός Ευρύτερου Δημόσιου Τομέα.

Ξένες Γλώσσες

- Αγγλικά
- Κινέζικα
- TOEFL (εξεταστικό κέντρο)
- GMAT
- IELTS
- TOEIC
- GRE

Επίσημο Εξεταστικό Κέντρο TOEFL

ETS AUTHORIZED TOEFL iBT CENTER

Εξειδικευμένα Σεμινάρια

- Στατιστικά Προγράμματα (SPSS, StatView,...)
- Matlab
- Mathematica
- Autocad
- Μηχανογραφημένη Λογιστική
- Γλώσσες Προγραμματισμού (C, C++, Java, Php,...)

Πληροφορική (Πιστοποιήσεις)

- Βασικό Επίπεδο (απαραίτητο στον ΑΣΕΠ)
- Προχωρημένο Επίπεδο
- Εξειδικευμένο Επίπεδο

Πιστοποιημένο Εξεταστικό Κέντρο ECDL

Πιστοποιημένο Εξεταστικό Κέντρο keyCERT

Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα μας www.vitali.gr και ενημερωθείτε για τα προγράμματά μας.

Διευθυντής Εκπαίδευσης

Δρ. Χόντας Στυλιανός
Διδάκτωρ Μηχανικός ΕΜΠ
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός & Μηχανικός Η/Υ